Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Simon Müller
Michele Serra
Wintersemester 2019/2020

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 7

Abgabe ihrer Lösung: Bis Donnerstag, 12. Dezember 2019, 09:55 Uhr, in den Briefkasten ihres Tutors im Gebäude F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, schreiben Sie ihren Namen und den Namen ihres Tutors auf jedes Blatt und heften Sie ihre einzelnen Blätter zusammen.

Aufgabe 7.1 *Beweismechanikaufgabe* (*2 Punkte*)

Bitte gehen Sie in dieser Aufgabe nach den Regeln der Beweismechanik vor und geben Ihre Lösung auf einem separaten Blatt in den Briefkasten mit der Aufschrift „Beweismechanikaufgaben" (Briefkasten 18) ab. Ihnen unbekannte Begriffe und Symbole können Sie in der Beweismechanik nachschlagen.

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Für $A, B \subset V$ definieren wir

$$A + B := \{x \in V : (\exists a \in A : \exists b \in B : x = a + b)\}.$$

Zeigen Sie: Sind $U_1, U_2, U_3 \subset V$ Unterräume von V mit $U_3 \subset U_1$, so gilt $(U_1 \cap U_2) + U_3 = U_1 \cap (U_2 + U_3)$.

Aufgabe 7.2 (*5 Punkte*)

Sei K ein Körper und k ein Teilkörper von K.

(a) Seien $A, B \in M_{n\times m}(K)$ in r.Z.S.F. Zeigen Sie, dass A genau dann zeilenäquivalent zu B ist wenn $A = B$.
(b) Folgern Sie aus (a), dass die r.Z.S.F. einer Matrix eindeutig ist.
(c) Sei $A \in M_{n\times m}(k)$. Zeigen Sie, dass $rZSF_k(A) = rZSF_K(A)$.
(d) Sei $A \in M_{n\times n}(k)$ und S das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$. Zeigen Sie, dass S genau dann eine nichttriviale Lösung in k^n besitzt, wenn S eine nichttriviale Lösung in K^n besitzt.
(e) Wir betrachten weiterhin das homogene lineare Gleichungssystem S aus (d). Welche Inklusionen können zwischen den Lösungsmengen $\mathcal{L}_k(S)$ und $\mathcal{L}_K(S)$ auftreten und wann tritt welcher Fall ein?

Aufgabe 7.3 (*5 Punkte*)

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n$. Eine Teilmenge $X \subseteq V$ heißt *minimal erzeugend*, falls $span(X) = V$ und $span(X\setminus\{x\}) \neq V$ für alle $x \in X$. X heißt *maximal linear unabhängig*, falls X linear unabhängig und $X \cup \{y\}$ linear abhängig ist für alle $y \in V \setminus X$. Zeigen Sie:

(a) Ist $X \subseteq V$ eine linear unabhängige Menge mit n Elementen, so ist X eine Basis von V.
(b) Sei $X \subseteq V$ endlich mit $span(X) = V$. Zeigen Sie, dass eine Basis Y von V mit $Y \subseteq X$ existiert. Gilt dies auch, wenn X unendlich viele Elemente enthält? Beweisen oder widerlegen Sie ihre Antwort.
(c) Sei $X \subseteq V$ eine n-elementige Menge mit $span(X) = V$. Zeigen Sie, dass X eine Basis von V ist.
(d) Sei nun $X \subseteq V$ beliebig. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
  (i) X ist eine Basis von V.
  (ii) X ist maximal linear unabhängig.
  (iii) X ist minimal erzeugend.

Aufgabe 7.4 (*4 Punkte*)

(Rückseite beachten) Sei K ein Körper und $A \in M_{n\times n}(K)$. A heißt *symmetrisch*, falls $A_{ij} = A_{ji}$ für alle $1 \leq i,\ j \leq n$. Ist $\mathrm{Char}(K) \neq 2$, so heißt A *alternierend*, falls $A_{ij} = -A_{ji}$ für alle $1 \leq i,\ j \leq n$. Wir bezeichnen die Menge der symmetrischen $n \times n$-Matrizen mit $Sym_{n\times n}(K)$ und die der alternierenden Matrizen mit $Alt_{n\times n}(K)$.

Sei K ein Körper mit $\mathrm{Char}(K) \neq 2$.

(a) Bestimmen Sie jeweils die Dimension und eine Basis für $Sym_{n\times n}(K)$ und $Alt_{n\times n}(K)$.
(b) Bestimmen Sie $Sym_{n\times n}(K) + Alt_{n\times n}(K)$ und $Sym_{n\times n}(K) \cap Alt_{n\times n}(K)$.

Nun sei K ein Körper der Charakteristik 2 und $Alt_{n\times n}(K)$ definiert wie oben. Bestimmen Sie auch hier die Dimension von $Alt_{n\times n}(K)$, sowie $Sym_{n\times n}(K) + Alt_{n\times n}(K)$ und $Sym_{n\times n}(K) \cap Alt_{n\times n}(K)$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass $Sym_{n\times n}(K)$ und $Alt_{n\times n}(K)$ Unterräume des K-Vektorraums $M_{n\times n}(K)$ sind.

Aufgabe 7.5

Besuchen Sie die Weihnachtsfeier unseres Fachbereichs.